NÚMEROS
Revista de didáctica de las matemáticas
N° 32, diciembre de 1997, págs. 13-25

Modelación matemática: Una antigua forma de investigación- un nuevo método de enseñanza.

Rodney C. Bassanezi y M. Salett Biembengut

Introducción

La modelización matemática ha sido utilizada por los que denominamos convencionalmente matemáticos aplicados como un proceso dinámico que les ayuda a entender cierto problema o alguna situación de interés en Física, Química, Biología, etc. Estos investigadores están frecuentemente a la búsqueda de modelos matemáticos que permitan una comprensión profunda de situaciones reales, teniendo presente sobre todo una posible toma de posición en relación a los objetos estudiados.

La formalización de un problema en términos matemáticos es casi siempre el estadio más difícil de la modelización matemática y debe ser aprendido con la propia experiencia. No siempre el hecho de tener un buen bagaje matemático se traduce en que el investigador logre el éxito en su labor de modelización. Una condición necesaria para el aprendizaje de la modelización es estudiar los modelos clásicos y las ideas esenciales que están envueltas en ellos.

La mayoría de autores cuando se refieren a la modelización matemática lo hacen como el proceso que utiliza conceptos y técnicas, esencialmente matemáticas, para el análisis de situaciones reales. En cambio, son raros los casos en que se emplea tal proceso para el propio estudio de las Matemáticas.

Los intentos de hacer uso de la modelización matemática como un método de enseñanza-aprendizaje han mostrado su eficacia, principalmente en proyectos de Iniciación Científica en Cursos de Reciclaje (Perfeccionamiento) de profesores, cuando no se dispone, a priori, de un programa que ha de ser cumplido, por lo menos secuencialmente, y objetiva sobre todo el uso de las matemáticas para una mejor comprensión de la situación escogida como tema de estudio. Algunas experiencias hechas en cursos regulares, esto es, en cursos con programas preestablecidos, mostraron que el proceso de modelización puede ser más eficiente que el de trabajar simplemente con el método tradicional *teoría-aplicación*, donde los problemas propuestos por el profesor son casi siempre artificiales y para procurar justificar la teoría recién enseñada. Cuando los alumnos son quienes escogen el tema o la situación que se va a estudiar, ellos se siente corresponsables de su propio aprendizaje y la motivación es espontánea. Las cuestiones formuladas por los alumnos son fuente de problemas que a su vez motivan el aprendizaje de nuevos conceptos matemáticos para llegar a las correspondientes soluciones. Es éste el momento ideal para realizar una *sistematización* de los conceptos usados, y así, el aprendizaje se torna suave y natural.

Lo que proponemos no es enseñar la modelización en las escuelas sino enseñar Matemáticas usando el método de la modelización. Por ejemplo, cuando se trabaja en un problema ligado a la realidad es necesario entenderlo en diferentes niveles de descripción y lo mismo sucede cuando se enseña en diferentes niveles escolares donde los grados de dificultad se van analizando de forma gradual.

Teniendo pues como objetivo enseñar las matemáticas inserta en un programa definido a priori, el proceso clásico de modelización debe ser modificado, teniendo siempre en cuenta el momento de la sistematización del contenido y el establecimiento constante de analogías con otras situaciones-problemas.

Convenimos en llamar ***Modelación Matemática***[1] al método de enseñanza-aprendizaje que utiliza el proceso de modelización en cursos regulares.

Modelación Matemática

El uso de este método en Educación Matemática debe seguir una secuencia de etapas bien definidas. Inicialmente, ha de quedar perfectamente claro la dinámica del proceso, lo que puede hacerse con un ejemplo bien escogido y que proporcione una visión panorámica del programa que ha de ser desarrollado. Así, si estamos trabajando en un

1 La palabra Modelación es una "contracción" de los terminos Modelización y Educación. Modelación = Modelización + Educación.

curso de Primaria, cuyo programa prevea el estudio de los números naturales, de los racionales en forma fraccionaria y decimal y algunos conceptos de geometría plana, podemos mostrar de forma rápida como los temas antes citados aparecen en «La construcción de una casa»: dibujo de la planta, construcción de las paredes, presupuesto, etc. En cursos más altos se podría trabajar con el problema de «La formación de una colmena» o de «La plantación de papas». Este procedimiento implica que el profesor debe haber tenido alguna experiencia en modelización matemática y construido sus propios modelos.

Es fundamental que los alumnos escojan el tema que ha de ser trabajado. Ello puede llevar consigo alguna dificultad para el profesor menos diestro. Una forma de eliminar este problema consiste en anotar en la pizarra los temas sugeridos por los alumnos, entremezclados con algunos de su particular interés.

Los temas también pueden ser anotados después de alguna investigación bibliográfica hecha por los alumnos. A continuación, el profesor deberá reflexionar sobre cada tema sugerido, indicando las ventajes de un tema que pueda contener a otros y los inconvenientes de aquellos temas que sean muy restrictivos. Casi siempre el asunto preferido por la mayoría es aquél sobre el que el profesor mostró más interés en su discurso.

En las primeras experiencias con Modelación es conveniente trabajar con un tema único. Posteriormente se pueden asignar a diferentes grupos los problemas formulados. Cada grupo de alumnos puede abordar aspectos diversos, pero siempre relativos a un mismo tema inicial.

Las experiencias realizadas con varios temas en una misma clase mostraron que la mayor dificultad radica en la atención que el profesor debe dispensar a cada grupo, pues cuando las situaciones están muy diversificadas el grado de atendimiento no va acompañado de un ritmo similar de trabajo. Después de algún tiempo es natural que el profesor se sienta más capacitado para atender varios temas y él mismo procura motivar la elección de situaciones desconocidas, lo que casi siempre será una aventura gratificante.

El planteamiento de problemas está íntimamente relacionado con el *estudio del tema* que podrá ser hecho a través de investigaciones bibliográficas (libros, revistas, periódicos, etc) y entrevistas con especialistas o personas conocedoras del tema. En algunos casos es interesante invitar a estas personas para que hablen sobre el tema en la Escuela, pues no siempre es posible salir con los alumnos para recoger datos, tal y como sucede con las clases nocturnas (cuando el tema trabajado fue «La pesca», se invitó a un pescador).

La recogida de datos también puede realizarse por medio de una experimentación directa o de investigaciones estadísticas. Conviene destacar que muchas veces los datos obtenidos son de naturaleza esencialmente etnomatemática, proveniente de costumbres de una comunidad que los utiliza sin preocuparse del carácter científico de su origen.

Casi siempre una combinación de estos procedimientos de recogida de datos es la forma más adecuada para obtener resultados más eficientes.

La *formulación de los problemas* se hace basándose en la investigación inicial y de conformidad con los intereses comunes. Es en este momento cuando han de establecerse los grupos de trabajo y cuando el profesor debe presentar otros problemas que estén en correlación o no con el tema en cuestión. La *analogía* entre problemas diversos muestra la importancia y el poder de las Matemáticas como lenguaje común que los identifica; la analogía es la tónica de nuestra propuesta.

Para la formulación de modelos matemáticos, cada grupo debe procurar establecer: (i) las variables esenciales envueltas en el tema; (ii) las hipótesis simplificadoras; (iii) las «leyes» o suposiciones consideradas verdaderas; etc.

Los alumnos tendrán más facilidad para formular sus hipótesis siempre que el profesor haya desarrollado en sus clases algunos problemas interrelacionados.

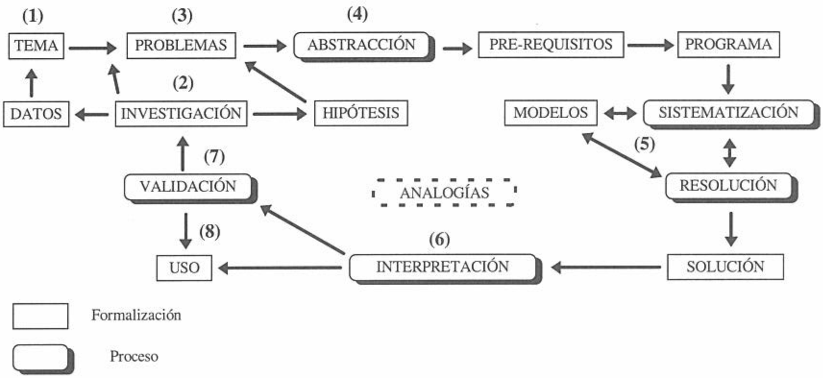
Es conveniente comenzar siempre con problemas sencillos, aunque no vayan a utilizar parte del programa del curso actual y sí de contenidos ya conocidos. Posteriormente, se pasa a modelos más complejos o generales, especialmente aquellos que utilizan argumentos matemáticos que deben desarrollarse durante el curso.

En el caso de que las matemáticas utilizadas en la resolución del modelo ya sean conocidas por los alumnos (pre-requisitos) se puede continuar el proceso a la manera en que se hace en la modelización matemática clásica, esto es, pasar a la *validación* del modelo y al análisis de sus consecuencias.

Toda solución debe ser interpretada usando los datos recogidos y, si es posible, verificar su validez empírica en términos científicos. Es conveniente buscar una expresión gráfica de la solución para entenderla mejor. Un modelo será tanto mejor cuanto mayor sea su capacidad de previsión y de accesibilidad a una verificación.

Es claro que cuanto más profundizamos en el entendimiento de un problema, proporcionalmente más complejo se torna el modelo matemático para describirlo y de esta forma casi siempre se puede alcanzar el nivel de conocimiento deseado y compatible con el curso que estamos impartiendo.

Con ayuda del siguiente esquema resumimos el método de Modelación Matemática.



En el esquema anterior, el orden de aplicación de cada procedimiento está indicado por los números encerrados entre paréntesis:

(1) Elección del tema central que ha de ser desarrollado por los alumnos;
(2) Investigación para recoger los datos cuantitativos e informaciones que puedan ayudar en la presentación de hipótesis;
(3) Elaboración de problemas que serán distribuidos entre los grupos de intereses comunes;
(4) Abstracción en el sentido de seleccionar las variables esenciales envueltas en los problemas y formulación de las hipótesis;
(5) Sistematización de los conceptos que serán usados en la resolución

de los modelos matemáticos y que forman parte del contenido programático del curso en cuestión. También debe ser efectuada mientras se trabaja en la resolución y formalización de los modelos;

(6) Interpretación de la solución de manera analítica y con posibles representaciones gráficas;

(7) Validación de los modelos que han de ser lo más coherentes posibles con la realidad investigada. En caso de que el modelo no sea bueno, debemos retomar el punto (1) con nuevas investigaciones. El proceso es dinámico;

(8) Cuando el modelo es satisfactorio debemos procurar utilizarlo para hacer previsiones, análisis, o cualquier otra forma de acción sobre la realidad.

De los temas desarrollados en diferentes experiencias realizadas en cursos regulares, citamos algunos:

- «Plantación de papas» - en un curso de Cálculo Diferencial e Integral para Ingeniería de Alimentos (UNICAMP-1983);
- «Construcción de casas» (Escuela Estatal de Estiva, S.P.-1986);
- «Construcción de un barrio» (Escuela Comunitaria de Campinas, S.P.-1988);
- «Abejas», «Música», «Deficientes mentales», «Caballos», «Flores».

Siguiendo el esquema de actuación de la Modelación, presentamos a continuación el problema de *La formación de una colmena*, correspondiente al tema «Abejas».

Ejemplo: Modelos para el problema de la formación de una colmena.

Una abeja reina puede llegar a poner hasta 2000 huevos por día (número denominado capacidad de postura), lo que corresponde a dos veces su peso. Esta cantidad depende del área disponible para la postura, de la calidad genética de la reina y de las condiciones florales y climáticas.

Cuando una reina disminuye su postura, las operarias responsables de la manutención de las larvas promueven el desarrollo de una nueva reina. La nueva reina, después del vuelo nupcial en que es fecundada por

Tema:
ABEJAS

Datos:

D1. Una reina suele vivir hasta 5 años y pone, por término medio, 2000 huevos /día.
D2. Una abeja tarda en nacer 21 días.
D3. Una colmena se inicia con una cantidad inicial de 10000 operarias.
D4. La vida media de una operaria es de 40 días.
D5. Una colmena estabiliza su población entre 60 y 80 mil abejas.
D6. Una colmena puede llegar a tener 400 zánganos.

Bibliografía
Entrevistas

Problemas:

P1. Formación de la colmena.
P2. Geometría de las celdillas del panal.
P3. Comercialización de la miel.
P4. Orientación de las abejas.

Hipótesis:

H0. Los primeros 21 días no nacen abejas.
H1. Las abejas iniciales tienen edades equidistribuidas.
H2. La cantidad de abejas que mueren es proporcional al número de abejas que existe en cada instante.

Abstracción:

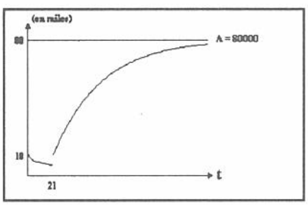
A1. Variables
A, a = nº de abejas
t = tiempo
A2. $a(0) = 10000$
A3. $k = 1/40$ es la tasa de natalidad
$1 - k = 0'975$ de supervivencia

Programa

- Ecuación de la recta.
- Función exponencial
- Función logarítmica
- Progresiones
- Límites elementales
- Continuidad

Resolución

Expresión de $a(t)$, $A(t)$



$\lim_{t \to \infty} A(t) = 80000$

uno o más zánganos, retorna a la colmena desalojando a la reina vieja que partirá para formar una nueva colmena. Acompañando a la reina le sigue un séquito de 10000 operarias, aproximadamente: es el enjambre volador.

Para el estudio del crecimiento de la población de una colmena consideraremos los siguientes datos:

d1- Una reina suele vivir 5 años y pone, por término medio, 2000 huevos/día;
d2- Una abeja operaria tarda en nacer 21 días;
d3- Una colmena se inicia con una cantidad inicial de 10000 operarias;
d4- La vida media de una operaria es de 40 días;
d5- Una colmena estabiliza su población entre 60 y 80 mil abejas.

Un modelo matemático de la dinámica poblacional de una colmena debe plantearse, teniendo en consideración dos estadios distintos: *el período de adaptación* intermedio entre la postura inicial y su nacimiento (21 días), y *el período de desarrollo* cuando nacen diariamente 2000 operarias.

En relación al período inicial podemos establecer dos hipótesis distintas respecto al índice de mortalidad de las operarias.

H1. Las abejas tienen edades equidistribuidas: En este caso estamos suponiendo que en cada grupo, distribuido por edades (días de vida), existen exactamente el mismo número de abejas. De esta forma, de las 10000 iniciales, en cada día morirán 250 lo que corresponde a 1/40 (tasa de mortalidad) de 10000.

Sea a(n) la cantidad de abejas que hay el n-ésimo día de existencia de la nueva colmena, $0 \leq n < 21$. Entonces, podemos escribir.

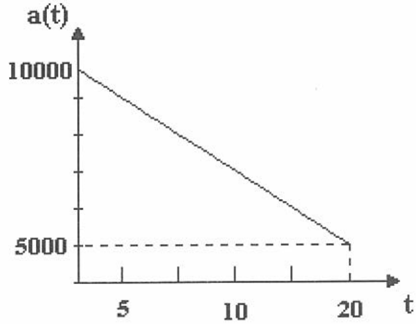
$a(0) = 10000$
$a(1) = a(0) - 250$
$a(2) = a(1) - 250 = a(0) - 2 \cdot 250$
$a(3) = a(2) - 250 = a(0) - 3 \cdot 250$, y generalizando, podemos escribir:
$a(n) = a(0) - n \cdot 250$

Así, obtenemos un modelo matemático que nos da información acerca de la cantidad de abejas en el n-ésimo día de existencia de la colmena $(n < 21)$:

$$(1) \qquad a(n) = 10000 - 250n\ , \quad 0 \leq n < 21.$$

El modelo (1) es discreto en el sentido que la variable independiente n (tiempo) está tomando valores en el conjunto de los números naturales N.

El modelo (2): $a(t) = 10000 - 250t$, $0 \leq t < 21$, t un número real, representa el modelo continuo correspondiente a la ecuación (1). La constante $c = -250$ es el coeficiente angular de la recta (fig.1):



H2. El número de abejas que mueren es proporcional a la cantidad de abejas que existe en cada instante:

Tenemos que la tasa de mortalidad es $k = 1/40 = 0'025$ y por tanto, la tasa de supervivencia es $1 - k = 0'975$. Podemos obtener una expresión para el número de abejas a(n) con un modelo discreto:

$a(0) = 10000$

$a(1) = 0'975 \cdot a(0)$

$a(2) = 0'975 \cdot a(1) = 0'975 \cdot 0'975 \cdot a(0)$, que puede generalizarse:

(3) $a(n) = 0'975^n \bullet a(0)$

Usando el hecho de que $a^x = e^{x.\ln a}$, para todo x real, la función potencial (3) puede escribirse en forma exponencial:

$$a(n) = e^{n.\ln 0'975} \bullet a(0)$$

En el caso continuo (tiempo continuo), podemos escribir:

(4) $a(t) = a(0) \bullet e^{-0'025t}$, $0 \leq t < 21$.

Tomando $a(0) = 10000$ y $t = 21$, obtenemos $a(21) = 5876$. Verificamos que, de acuerdo con la hipótesis considerada, los valores de a(21) en (3) y (4) son distintos, si bien en la práctica, tal diferencia no será significativa para el estudio del comportamiento futuro de la colmena.

El modelo matemático para el período de desarrollo de la nueva colmena tiene en cuenta que, a partir del día 21, nacen 2000 abejas/días:

Si A(0) es la cantidad remanente de operarias viejas, tendremos para el 21-ésimo día:

$$A(1) = a(21) = A(0) + 2000$$

Considerando una tasa de supervivencia igual a 0'975, podemos formar una relación de recurrencia dependiendo del valor de A(0):

$A(2) =$ $a(22) = 0'975 \bullet A(1) + 2000 = 0'975 \bullet [A(0) + 2000] + 2000 =$ $= 0'975 \bullet A(0) + 0'975 \bullet 2000 + 2000 = 0'975 \bullet A(0) + 2000 \bullet (0'975 + 1)$.

$A(3) =$ $a(23) = 0'975 \bullet A(2) + 2000 = 0'975 \bullet [0'975 \bullet A(0) + 0'975 \bullet 2000 + 2000] + 2000 = 0'975^2 \bullet A(0) + 0'975^2 \bullet 2000 + 0'975 \bullet 2000 + 2000 = 0'975^2 \bullet A(0) + 2000 \bullet [0'975^2 + 0'975 + 1]$.

Y así sucesivamente, llegamos a la expresión:

$A(n) = 0'975^{n-1} \bullet A(0) + 0'975^{n-1} \bullet 2000 + 0'975^{n-2} \bullet 2000 + \ldots + 0'975 \bullet 2000 + 2000 = 0'975^{n-1} \bullet A(0) + 2000 \bullet [0'975^{n-1} + 0'975^{n-2} + \ldots + 0'975 + 1]$.

La expresión entre corchetes es la suma de n términos de una progresión geométrica de razón igual a 0'975, lo que nos permite simplificar escribiendo:

$$(5)\qquad \begin{aligned} A(n) &= 0'975^{n-1}\bullet A(0) + 2000\bullet[(1 - 0'975^{n})/(1 - 0'975)] = \\ &= 0'975^{n-1}\bullet A(0) + 80000\bullet(1 - 0'975^{n}) = \\ &= 0'975^{n-1}\bullet A(0) + 80000 - 80000\bullet 0'975^{n} = \\ &= [A(0) - 78000]\bullet 0'975^{n-1} + 80000 \end{aligned}$$

Podemos pensar en una expresión continua para A(n) tomando:

$$A(t) = [A(0) - 78000]\bullet e^{\ln 0'975.(t-21)} + 80000 \quad (t \geq 21)\text{, o sea,}$$

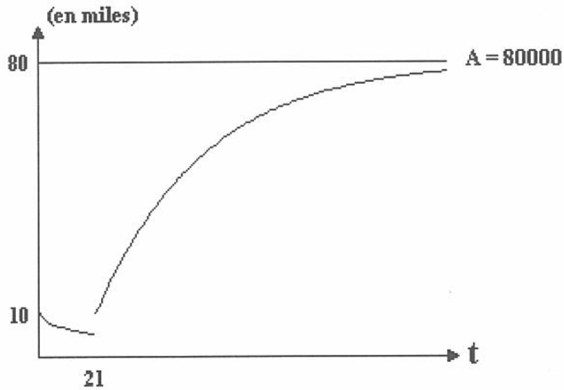
$$(6)\qquad A(t) = [A(0) - 78000]\bullet e^{-0'025.(t-21)} + 80000 \text{ para } t \geq 21$$

La fórmula (6) nos da la población de una colmena en un tiempo t cualquiera a partir del 21-ésimo día.

Anotamos que cuando t crece, el valor de $e^{-0'025.(t-21)}$ tiende a cero y, por tanto, la población de la colmena se estabiliza en 80000 abejas, lo que muestra cierta validez del modelo debido a la coherencia con los datos reales. La estabilidad puede ser traducida a la siguiente expresión matemática:

$$(7)\qquad \lim_{t\to\infty} A(t) = 80000$$

La recta A = 80000 es una asíntota horizontal de la función A(t):



Juntando las dos partes del modelo continuo de crecimiento poblacional de las abejas (ecuaciones (4) y (6)), podemos escribir:

$$A(t) = 10000 \bullet e^{-0'025t} \quad , \quad \text{si } 0 \leq t < 21$$
$$A(t) = [A(0) - 78000] \bullet e^{-0'025.(t-21)} + 80000 \quad , \text{si } t \leq 21; \; A(0) = 5876$$

Si estuviésemos explicando en un curso donde el concepto de derivada debiera ser aprendido, podríamos construir nuestro modelo utilizando otro lenguaje y expresar la hipótesis H2 de manera más concisa:

(7) $dA/dt = - 0'025 \bullet A(t)$, con $A(0) = 10000$ y , $0 \leq t < 21$, donde dA/dt indica la variación instantánea de la población de abejas.

La expresión (7) quiere decir que en los primeros 21 días, *la variación de la población de abejas es proporcional a la cantidad presente en cada instante*, con una tasa de mortalidad igual a 1/40 = 0'025 y una población inicial de 10000 abejas.

A partir del 21-ésimo día podemos suponer que *el crecimiento de la población es proporcional a la diferencia entre el valor de estabilidad y la cantidad de abejas presentes en cada instante:*

(8) $dA/dt = k \bullet (80000 - A(t))$, donde $k = - \ln 0'975 = 0'025$, con $A(0) = 5876$ y $t \geq 21$

Observamos que el modelo propuesto aquí encima proviene de la analogía existente entre la solución (6) y el «modelo de acaecimiento de Newton».

Resaltamos que, tanto con el modelo de ecuaciones diferenciales como con el de progresiones geométricas, obtenemos soluciones equivalentes. Tal y como hemos hecho en nuestro caso, de modo general casi siempre podemos expresar nuestros modelos en función del programa que ha de cumplirse y del grado de dificultad que queramos alcanzar.

Bibliografía

Adler, Irving. Mathematics and Mental Growth. New York, National Council of teachers of mathematics, 1968.

Bassanezi, R.C. Modelagem Aprendizagem. Bol. Soc. Bras. Mat. Aplicada, 1990.

Bassanezi , R.C. e Biembengut, M.S. Modelaçao Matemática: Uma velha forma de pesquisa-Um novo método de ensino. Anais de I-CIBEM-SAEM «Thales», Sevilha, 1990.

Baum, Robert J. Philosophy and Mathematics. Freem Cooper and Co., 1973.

Berry, J. e O'sheat, T. Assessing Mathematical Modelling in International Journal of Mathematics Education Science and Technology, vol. 13, 6, 1982.

Biembengut, María Salett. Modelaçao matemática como método de ensino aprendizagem de matemática no 1° e 2° grau. Dissertaçao de Mestrado, UNESP, Rio Claro-SP, 1990.

Burghes, D.N., HuntleyY, I. and Mcdonald, J. Aplying Mathematics - A Course in Mathematical Modelling, Ellis Horword, 1982.

Bruner, Jerome S., O Proceso de Educaçao, 8ª ediçao, Sao Paulo, Editora Nacional, 1987.

D'ambrossio, Ubiratan. Da Realidade à Açao: reflexoes sobre educaçao e matemática. Sao Paulo, Summus, Campinas, 1986.

Granger, G.G. A Razao. 2ª ediçao, Sao Paulo, Difusao Europèia do Livro, 1969.

Niss, Mogen. Applications and Modelling in Mathematics Curriculum - state and trends in IJMEST, vol 18, 4, 1987.

Oke, K. H. e Bajpal. Teaching the Formulation Stage of Mathematics Curriculum Modelling to Students in the Mathematical and Physical Sciences, in IJMEST, vol 12, 6, 1981.

Piaget J. Os Seis Estudos de Psicologia. Rio de Janeiro, Ed. Forense, 1987.

Rodney C. Bassanezi
IMECC-UNICAMP
Campinas- SP (Brasil)

M. Salett Biembengut
Departamento de Matemáticas
Universidad de Blumenau (Brasil)

Versión española de Arístides Ramón Noda Lugo